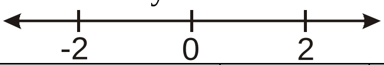
2.3.3 Nerovnice v součinovém tvaru II

Předpoklady: 2302

Př. 1: Řeš nerovnici $x^3 - 4x \geq 0$.

Problém: Na levé straně není součin $\Rightarrow$ musíme ho nejdříve vytvořit:
$x^3 - 4x = x\left(x^2 - 4\right) = x(x-2)(x+2)$ $\Rightarrow$ řešíme nerovnici: $x(x-2)(x+2) \geq 0$.
Vlevo součin tří čísel, úvaha platí (záleží jen na znaménkách) $\Rightarrow$ stejný postup s větší tabulkou.
Nulové body:



	$(-\infty;-2)$	$(-2;0)$	$(0;2)$	$(2;\infty)$
x	-	-	+	+
$(x+2)$	-	+	+	+
$(x-2)$	-	-	-	+
$x(x-2)(x+2)$	-	+	-	+

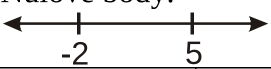
Nulové body jsou součástí řešení, protože v nerovnosti je $\geq$.
$K = \langle -2;0 \rangle \cup \langle 2;\infty)$

Př. 2: Řeš nerovnici $x^2 < 3x + 10$.

Problém: Na pravé straně není nula, nemáme součin. $\Rightarrow$

- Na pravé straně vyrobíme nulu $x^2 - 3x - 10 < 0$.
- Na levé straně vyrobíme součin $(x-5)(x+2) < 0$.

Dále již jako obvykle.
Nulové body:



	$(-\infty;-2)$	$(-2;5)$	$(5;\infty)$
$(x-5)$	-	-	+
$(x+2)$	-	+	+
$(x-5)(x+2)$	+	-	+

$K = (-2;5)$

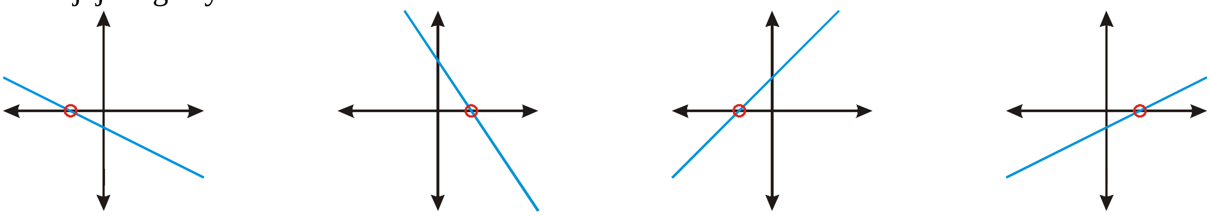
Pedagogická poznámka: Neumím vysvětlit proč, ale několik studentů řešilo předchozí příklad obráceně (jako nerovnici $(x-5)(x+2) > 0$). Automaticky do řešení zahrnulo ty intervaly, které měly u znaménka celého výrazu plus.

Pedagogická poznámka: Upozorněte studenty, že v obou předchozích příkladech šlo opět o naplnění zásady „převedu na předchozí příklad“ nebo „napíšu si to, jak potřebuju, aby to šlo“.
Předchozím příkladům věnuji maximálně 15 minut, aby bylo dost času na zbytek hodiny.

Pedagogická poznámka: Už na začátku minulé hodiny studentům říkám, že řešení nerovnic je možné provést podstatně rychleji než pomocí tabulky, a vyzývám je k tomu, aby se takový způsob pokusili vymyslet.
K řešení následujícího příkladu studenty motivuji tím, že si před třídou trochu „zamachruju“. Studenti, kteří během půlhodiny pracně vytabulkovali čtyři příklady, jsou docela unešení, když jim ukážu, že je možné příklady řešit zpaměti, v případě horších zadání (které je nechám vymyslet) pak pouze s tím, že si na osu napíši nulové body. Rozhodně je to podnítí k tomu, aby na to zkusili také přijít.

Př. 3: Projdi řešení předchozích příkladů a na jejich základě:
a) Najdi způsob, jak rychle vyplnit řádku v tabulce patřící jedné závorce.
b) Najdi způsob, jak vyřešit předchozí příklady bez použití tabulky.

a) Najdi způsob, jak rychle vyplnit řádku v tabulce patřící jedné závorce.
Všechny závorky v tabulkách jsou lineární (obsahují neznámou pouze v první mocnině) $\Rightarrow$ odpovídají předpisu lineární funkce $y = ax + b$, kde $a \neq 0$.
Když se zajímáme o hodnoty závorek, zajímáme se o hodnoty lineárních funkcí $\Rightarrow$ podíváme se na jejich grafy:



Ve všech případech platí:

- Funkce má kladné i záporné hodnoty.
- Funkce mění znaménko pouze jednou.
- Funkce mění znaménko v bodě, kde dosáhne nulové hodnoty.
- Klesající funkce začíná v kladných číslech, rostoucí v záporných.

$\Rightarrow$ Znaménko v prvním intervalu určíme z druhu lineární funkce, která odpovídá výrazu v závorce:

- Rostoucím funkcím napíšeme do prvního intervalu mínus (rostou ze záporných hodnot).
- Klesajícím funkcím napíšeme do prvního intervalu plus (klesají z kladných hodnot).

Stejné znaménko píšeme do všech dalších sloupců, dokud nenarazíme na nulový bod závorky. V něm znaménko obrátíme a dopíšeme až do konce.

b) Najdi způsob, jak vyřešit předchozí příklady bez použití tabulky.
Ve všech předchozích příkladech se znaménka v posledním řádku tabulky (s celým výrazem) pravidelně mění.
Proč?
Napovídá předchozí bod. V každém nulovém bodě změní znaménko jedna závorka $\Rightarrow$ změní se i znaménko celého výrazu.

$\Rightarrow$ Stačí určit hodnotu výrazu v jednom z krajních intervalů a pak jen měnit znaménka při přechodu přes nulové body.

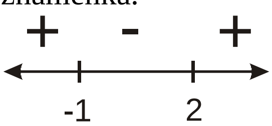
Pedagogická poznámka: Předchozí příklad a vůbec celá diskuse o znaménkách závorek (jejich určování pro studenty rozhodně není jednoduché) jsou jedním z důvodů, proč považuji za nutné spojení funkcí a rovnic dohromady. Pokud studenti v tomto okamžiku nemají probrané lineární funkce, nemohou předchozí metodu (ani způsob, jak částečně kontrolovat správnost vyplnění řádků v tabulce) nikdy pochopit.

Př. 4: Vyřeš bez tabulky nerovnice:
a) $(x-2)(x+1)<0$ b) $x(x-1)(x-2)\geq 0$
c) $(2-x)(2x+1)\left(x+\sqrt{2}\right)\leq 0$.

a) $(x-2)(x+1)<0$
Vyznačíme si druhy funkcí a znaménko v prvním intervalu:

$$\overset{\overset{-}{\nearrow}}{(x-2)}\cdot\overset{\overset{-}{\nearrow}}{(x+1)}<0$$

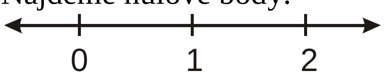
Najdeme nulové body:

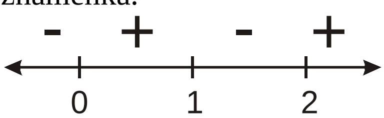

V prvním intervalu je hodnota součinu kladná (dvě záporné závorky) $\Rightarrow$ doplníme další znaménka.


$K=(-1;2)$

b) $x(x-1)(x-2)\geq 0$
Vyznačíme si druhy funkcí a znaménko v prvním intervalu:

$$\overset{\overset{-}{\nearrow}}{x}\overset{\overset{-}{\nearrow}}{(x-1)}\overset{\overset{-}{\nearrow}}{(x-2)}\geq 0$$

Najdeme nulové body:


V prvním intervalu je hodnota součinu záporná (tři záporné závorky) $\Rightarrow$ doplníme další znaménka.


$K=\langle 0;1\rangle\cup\langle 2;\infty)$

c) $(2-x)(2x+1)\left(x+\sqrt{2}\right)\leq 0$
Vyznačíme si druhy funkcí a znaménko v prvním intervalu:

$+ \quad - \quad -$

$\searrow \quad \nearrow \quad \nearrow$

$(2-x)(2x+1)\left(x+\sqrt{2}\right) \le 0$

Najdeme nulové body:

$-\sqrt{2} \qquad -\frac{1}{2} \qquad 2$

V prvním intervalu je hodnota součinu kladná (dvě záporné a jedna kladná závorka) $\Rightarrow$ doplníme další znaménka.

$+ \quad - \quad + \quad -$

$-\sqrt{2} \qquad -\frac{1}{2} \qquad 2$

$K = \left\langle -\sqrt{2}; \frac{1}{2} \right\rangle \cup \langle 2; \infty)$

Př. 5: Vyřeš bez tabulky nerovnice:

a) $(x-1)(2-x)(2x+3)(4x-1) \le 0$

b) $\left(x+\sqrt{2}\right)(x-\pi)(x+1)^2(3-4x) > 0$

a) $(x-1)(2-x)(2x+3)(4x-1) \le 0$

Vyznačíme si druhy funkcí a znaménko v prvním intervalu:

$- \quad + \quad - \quad -$

$\nearrow \quad \searrow \quad \nearrow \quad \nearrow$

$(x-1)(2-x)(2x+3)(4x-1) \le 0$

Najdeme nulové body:

$-\frac{3}{2} \qquad \frac{1}{4} \qquad 1 \qquad 2$

V prvním intervalu je hodnota součinu záporná (tři záporné a jedna kladná závorka) $\Rightarrow$ doplníme další znaménka.

$- \quad + \quad - \quad + \quad -$

$-\frac{3}{2} \qquad \frac{1}{4} \qquad 1 \qquad 2$

$K = \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{4}; 1 \right\rangle \cup \langle 2; \infty)$

b) $\left(x+\sqrt{2}\right)(x-\pi)(x+1)^2(3-4x) > 0$

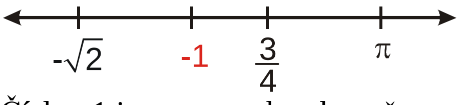
Vyznačíme si druhy funkcí a znaménko v prvním intervalu:

$- \quad - \quad + \quad +$

$\nearrow \quad \nearrow \quad \quad \searrow$

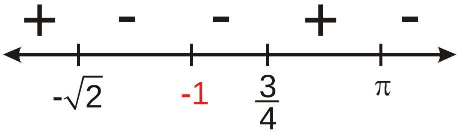
$\left(x+\sqrt{2}\right)(x-\pi)(x+1)^2(3-4x) > 0$

Najdeme nulové body:



Číslo –1 je na ose nakresleno červeně. V tomto bodě se mění znaménko dvakrát (závorka $(x+1)^2$ je na druhou) $\Rightarrow$ znaménko celého výrazu se tady měnit nebude.

V prvním intervalu je hodnota součinu kladná (dvě záporné a dvě kladné závorky) $\Rightarrow$ doplníme další znaménka.



$K = \left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; \pi\right)$

Př. 6: Napiš množinu řešení nerovnice $\left(x+\sqrt{2}\right)(x-\pi)(x+1)^2(3-4x) < 0$.

V zadání je téměř stejná nerovnice jako v příkladu 5 b), liší se pouze znaménkem nerovnosti.
Z obrázku u předchozího příkladu je řešení jasné, musíme dát pozor na interval $\left(-\sqrt{2}; \frac{3}{4}\right)$.
Není řešením celý, musíme z něj vyjmout číslo –1, pro které je levá strana nerovnice rovna nule.

$K = \left(-\sqrt{2}; -1\right) \cup \left(-1; \frac{3}{4}\right) \cup (\pi; \infty)$

Pedagogická poznámka: Nechávám studenty, aby si do budoucna vybrali libovolnou metodu na řešení nerovnic. Někteří hádají jako já, někteří si kreslí tabulku s rychlým vyplňováním řádků, někteří kreslí znaménka na osu.
Snažím se studentům vysvětlit, že podobná zjednodušení mohou vytvářet pouze v případě, že budou dobře rozumět tomu, co se učí, a budou si něco pamatovat. Lidé, kteří si nedokáží nic srovnat v hlavě, se toho musí učit nazpaměť daleko víc. Z tohoto důvodu považuji tuto hodinu za jednu z nejdůležitějších, protože zisk z toho, že situaci dobře rozumíme, je oproti mechanickým šrotičům evidentní.

Př. 7: Petáková:
strana 12/cvičení 2 a) b) f) g)

Shrnutí: Řešení nerovnic v součinovém tvaru urychlíme, když si uvědomíme, že jednotlivé závorky v součinu jsou většinou předpisy lineárních funkcí a jejich znaménko se nemůže měnit libovolně.